1.7 Serie di potenze - Esercizi proposti

Esercizio 1.7.1

Determinare il raggio di convergenza e l' insieme di convergenza delle seguenti serie di potenze:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$; [$R = 1$, converge negli estremi]
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)^4 x^n}{n!}$ [$R = \infty$]
3. $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(x-1)^n$ [$R = 1$, non converge negli estremi]
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 5^n}{3^n + 7^n} x^n$ [$R = 7/5$, non converge negli estremi]
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{6^n + 2} x^n$ [$R = 0$]
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{2^n + 1}$ [$R = 2$, non converge negli estremi]
7. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} \sqrt{\frac{n^2+1}{n^2}}$ [$R = 1$, non converge negli estremi]
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^{3n}}{2n(2n+2)}$ [$R = 5^{-1/3}$, converge negli estremi]
9. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n x^{2n+1}}{n(n+1)}$ [$R = 3^{-1/2}$, converge negli estremi]
10. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \frac{1 + n2^n}{1 + n^2 2^n}$ [$R = 1$, converge negli estremi].

Esercizio 1.7.2

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n \ln(\frac{n+3}{n+2}) x^n$$

con a parametro reale positivo,

- si determini a in modo che il suo raggio di convergenza valga 3;
- per il valore di a trovato si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

[$a = 1/3$; per $x = 3$ la serie diverge, per $x = -3$ converge semplicemente]

Esercizio 1.7.3

Data la serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} b^n \sin(\frac{1}{\sqrt{n}+3}) x^n$$

con b parametro reale positivo

- si determini b in modo che il suo raggio di convergenza valga 2;
- per il valore di b trovato si studi il comportamento della serie agli estremi dell'intervallo di convergenza.

[$b = 1/2$; per $x = 2$ la serie diverge, per $x = -2$ converge semplicemente]

Esercizio 1.7.4

Il raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ è $R = 5$. Determinare il raggio di convergenza delle serie

$$a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} 3a_n x^{2n}, \qquad b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{4n+3}.$$

[$a)$ $R = \sqrt{5}$, $b)$ $R = \sqrt[4]{5}$]

Esercizio 1.7.5

Sviluppare le seguenti funzioni in serie di McLaurin, indicando il raggio di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \sin(x^2)$; [$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $R = \infty$]
2. $f(x) = \ln(1 + x^4)$; [$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{4n}}{n}$, $R = 1$]
3. $f(x) = \arctan(5x)$; [$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{5^{2n+1} x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1/5$]
4. $f(x) = \frac{2}{3-5x}$; [$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n x^n}{3^{n+1}}$, $R = 3/5$]
5. $f(x) = \ln(2 + x^2)$; [$\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n 2^n}$, $R = \sqrt{2}$]
6. $\frac{x}{x^2 - x - 2}$ [$1/3 \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n - 2^{-n}) x^n$, $R = 1$]
7. $\frac{3 - 2x}{(1-x)^2}$ [$\sum_{n=0}^{\infty} (n+3) x^n$, $R = 1$]
8. $\log(x^2 + 5x + 6)$ [$\log 6 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^n}) x^n$, $R = 2$]

Esercizio 1.7.6

Sviluppare in serie di Taylor, con centro nei punti indicati seguenti funzioni, indicando l'insieme I di convergenza degli sviluppi ottenuti.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = 2$; [$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}}$, $I = (0, 4)$]
2. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 = -3$; [$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3^{n+1}}$, $I = (-6, 0)$]
3. $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$; [$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (x-1)^n$, $I = (0, 2)$]
4. $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x}}{4-x}$ $x_0 = 1$. [$-\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2} + \frac{1}{3^n} \right) \frac{(x-1)^n}{n}$, $I = (0, 2]$]

Esercizio 1.7.7

a) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\mathrm{Erf}(x)$ e calcolare $\mathrm{Erf}(1/2)$ e $\mathrm{Erf}(-1/2)$ con un errore minore di 10^{-3}.
[$\mathrm{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)n!} x^{2n+1}$, $\mathrm{Erf}(1/2) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320}\right)$, $\mathrm{Erf}(-1/2) = -\mathrm{Erf}(1/2)$, essendo la funzione $\mathrm{Erf}(x)$ dispari]

b) Scrivere lo sviluppo in serie di potenze della funzione $\mathrm{S}(x)$ e calcolare $\mathrm{S}(1/3)$ con un errore minore di 10^{-3}.
[$\mathrm{S}(x) = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)! 2^{2n+1}(4n+3)} x^{4n+3}$, $\mathrm{S}(1/3) \approx \pi/162$]

c) Calcolare per serie con un errore minore di 10^{-3} i seguenti integrali.

1. $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$; [$I = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600}$]
2. $\int_0^1 \cos(x^2) dx$; [$I = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!(4n+1)} \approx 1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{216}$]
3. $\int_0^{1/2} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$. [$I = \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{2^n n^2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{16} + \frac{1}{72} - \frac{1}{256} + \frac{1}{800}$]

Esercizio 1.7.8

Determinare l'insieme I di convergenza delle seguenti serie di funzioni, riconducendole, mediante un'opportuna sostituzione a serie di potenze.

1. $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}$; [$\mathrm{e}^{-x} = t$, $I = [0, +\infty)$]
2. $\sum_0^\infty \frac{\ln^n x}{(n^2+1)2^n}$; [$\ln x/2 = t$, $I = [\mathrm{e}^{-2}, e^2]$]
3. $\sum_0^\infty (\sin^n x + \cos^n x)$.
   [Si studiano separatamente le due serie con le sostituzioni $\sin x = t, \cos x = t$, $I = \mathbf{R} \setminus \{x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$]